SVEUČILIŠTE "JOSIPA JURJA STROSSMAYERA" U OSIJEKU

PREHRAMBENO-TEHNOLOŠKI FAKULTET OSIJEK

MODELIRANJE OPERACIJA I PROCESA

OPTIMIRANJE PREHRANE PRIMJENOM RAČUNALA

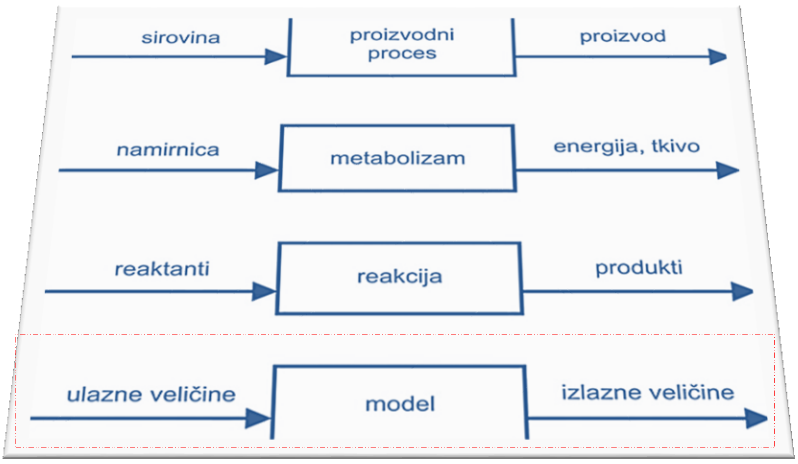
MODELIRANJE I UPRAVLJANJE U PREHRAMBENO-TEHNOLOŠKIM PROCESIMA

prof. dr. sc. Damir Magdić

NUMERIČKE METODE

- skripta za studente -

Treće
dopunjeno
izdanje



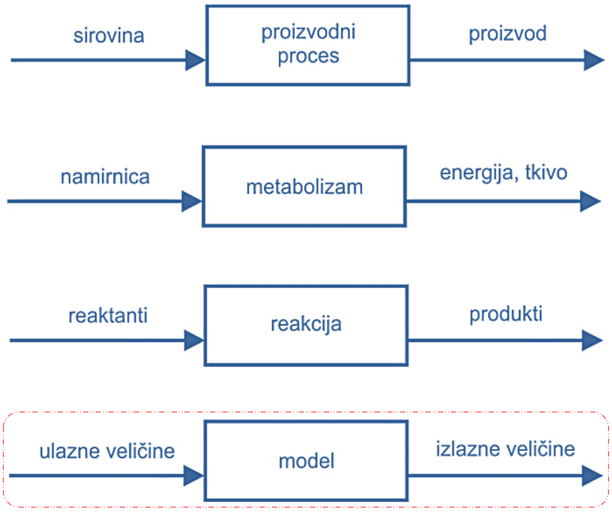
Osijek, ak. g. 2021./22.

Sadržaj

UVOD U PRIMJENU NUMERIČKIH METODA

Zašto su nam potrebne numeričke metode u prehrambenom i procesnom inženjerstvu i u nutricionizmu?

Tehnološki procesi, kemijske i enzimske reakcije u prehrambenim materijalima (sirovinama i namirnicama) mijenjaju svojstva tih materijala. Svojstva se mijenjaju i tijekom tehnoloških procesa i kasnijeg skladištenja namirnica. Prilikom konzumiranja namirnica svaka namirnica se drugačije iskoristi u metabolizmu potrošača i svaki potrošač drugačije u svom metabolizmu iskoristi istu namirnicu.
Shematski bi ove pojave mogle izgledati kao na sljedećoj slici:



Slika 1. Prikaz odnosa ulaznih i izlaznih veličina

Elementi s lijeve strane shematskog prikaza su oni koji ulaze u proces i u njemu se mijenjaju. Njihove promjene nastojimo planirati, kontrolirati i njima upravljati kako bismo postigli optimalne rezultate preradom sirovina te čuvanjem i konzumacijom gotovih prehrambenih proizvoda.
Elementi s desne strane shematskog prikaza su ciljevi koje želimo postići.

Za upravljanje navedenim procesima potrebno je poznavati svojstva i sastojke ulaznih materijala, utjecaj nekoga procesa na njih i načine poboljšavanja u željenom smjeru.
Da bismo ovo postigli potrebno je svojstva prehrambenih materijala opisati fizikalnim (mjernim) veličinama i mjernim jedinicama.

Međusobne zavisnosti ulaznih i izlaznih veličina moguće je povezati matematičkim opisom. Ovakav matematički opis nazivamo bilancom. Ako smo matematički opisali zavisnost ulaznih i izlaznih fizikalnih svojstava materijala onda takav opis zovemo **bilanca mase**. Ako smo matematički opisali promjene nekog oblika energije (najčešće toplinske) onda takav opis zovemo **bilanca energije**. Primjer jedne bilance mase je bilanca koncentracije reaktanta A u kemijskoj reakciji:

$$\frac{d}{dt}A = D \cdot A_0 - D \cdot A - k_1 \cdot A + k_{-1} \cdot B$$

Matematički opis promjene koncentracije reaktanta A, $(\frac{d}{dt}A)$ **zapravo je matematička jednadžba**.
Ovakve **jednadžbe rješavamo matematičkim postupcima (alatima) koji se zovu matematičke ili numeričke metode** (Dodatak 3.).
Bilance mogu biti opisane linearnim, nelinearnim, diferencijalnim i drugim oblicima jednadžbi. Stoga je potrebno poznavati metode za njihovo rješavanje (Dodatak 2.).
Kada bilancama povežemo ulazne i izlazne veličine, izaberemo numeričku metodu za rješavanje jednadžbi i nakon toga možemo izraditi matematički model (Dodatak 1.).

METODE ZA RJEŠAVANJE LINEARNIH JEDNADŽBI

Direktne metode

1. Gauss-ova eliminacija

Bit će korištena u primjeru modeliranja kemijskih reakcijskih mehanizama

Zadan je sustav linearnih jednadžbi:

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 0 \\ 2x - y + 4z &= 5 \\ 3x + y - z &= 2 \end{aligned}$$

Pri određivanju rješenja metodom Gauss-ove eliminacije zadani sustav jednadžbi se napiše u matričnom obliku. Elementi matrice ***A*** zapravo koeficijenti uz nepoznanice u jednadžbama, a elementi vektora $\vec{b}$ su rješenja jednadžbi:

$$\mathrm{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{vmatrix}$$

<u>1. korak:</u> Potrebno je načiniti proširenu Gauss-ovu matricu **Ab**, tako da vektor rješenja $\vec{b}$ pripišemo kao četvrti stupac matrici koeficijenata **A**.

$$\mathrm{A}b = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Rješavanje se provodi primjenom elementarnih transformacija jednadžbi s ciljem dobivanja jedinica na glavnoj dijagonali matrice A i nula ispod glavne dijagonale.

<u>2. korak:</u> Na retke proširene matrice primjenjujemo elementarne transformacije da bismo ispod glavne dijagonale matrice **Ab** dobili sve nule.
(elementarne transformacije ne primjenjuju se na stupce, njima je jedino moguće zamijeniti mjesta)

1. prvi redak prepisati
2. elemente drugog retka umanjiti za vrijednost elemenata prvog retka pomnoženih s dva
3. elemente trećeg retka umanjiti za vrijednost elemenata prvog retka pomnoženih s tri

Nakon provedbi elementarnih transformacija, proširena Gauss-ova matrica izgleda će ovako:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 10 & 5 \\ 0 & -5 & 8 & 2 \end{vmatrix}$$

Sljedeće elementarne transformacije dovode nas do rješenja sustava jednadžbi:

4. prvi i drugi redak prepisati
5. elemente trećeg retka umanjiti za vrijednost elemenata drugog retka

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 10 & 5 \\ 0 & -5 & 8 & 2 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 10 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

6. prvi redak prepisati
7. drugi redak podijeliti sa (-5)
8. treći redak podijeliti sa (-2)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 10 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{vmatrix}$$

glavna dijagonala matrice

3. korak: Iz trećeg reda matrice očita se da je **1·z = 3/2**.
Dobivena vrijednost nepoznanice **z** uvrsti se u drugu jednadžbu iz proširene matrice **Ab** (drugi redak matrice):

$$0 \cdot x + 1 \cdot y - 2 \cdot z = -1$$
$$y - 2 \cdot \frac{3}{2} = -1$$
$$y - 3 = -1$$
$$y = -1 + 3$$
$$\mathbf{y} = 2$$

Dobivene vrijednosti nepoznanica **y** i **z** uvrste se u prvu jednadžbu iz proširene matrice **Ab** (drugi redak matrice):

$$1 \cdot x + 2 \cdot y - 3 \cdot z = 0$$
$$x + 2 \cdot 2 - 3 \cdot \frac{3}{2} = 0$$
$$x + 4 - \frac{9}{2} = 0$$
$$x - \frac{1}{2} = 0$$
$$\mathrm{x} = \frac{1}{2}$$

Rješenje sustava linearnih jednadžbi je:

$$x = \frac{1}{2} \qquad y = 2 \qquad z = \frac{3}{2}$$

Rješenja možemo napisati i u drugom obliku:

$$x = 0.5 \qquad y = 2 \qquad z = 1.5$$

2. Gauss-Jordan-ov postupak

Elementarne transformacije koje su provedene u drugom koraku rješavanja kod Gauss-ove eliminacije moguće je nastaviti sve dok na glavnoj dijagonali matrice nisu jedinice, a ostali elementi ispod i iznad dijagonale nule.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & \frac{9}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{vmatrix}$$

Kada su elementi glavne dijagonale jedinice, a ispod i iznad glavne dijagonale nule

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{vmatrix}$$

rješenje je moguće očitati direktno iz matrice:

1. redak: **1·x** + 0·y + 0·z **= 0.5**

2. redak: 0·x + **1·y** + 0·z **= 2**

3. redak: 0·x + 0·y + **1·z = 1.5**

Rješenje sustava linearnih jednadžbi je:

$$\underline{x = 0.5 \qquad y = 2 \qquad z = 1.5}$$

Iterativne metode

Za razliku od direktnih numeričkih metoda koje u prvom izračunu daju konačan rezultat, iterativne metode prvo izračunavaju približan rezultat. Tek u ponovnim izračunavanjima (iteracijama) po uvijek istom matematičkom izrazu izračunate vrijednosti se približavaju konačnom točnom rješenju.

3. Gauss-Seidl-ova iteracija

Zadan je sustav linearnih jednadžbi:

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 0 & &= f_1 \\ 2x - y + 4z &= 5 & &= f_2 \\ 3x + y - z &= 2 & &= f_3 \end{aligned}$$

Postupak rješavanja je sljedeći:

1. Zadane jednadžbe napišu se u eksplicitnom obliku:

$$\begin{aligned} x &= f(y,z) & x &= -2y + 3z & &= g_1 \\ y &= f(x,z) & y &= 2x + 4z - 5 & &= g_2 \\ z &= f(x,y) & z &= 3x + y - 2 & &= g_3 \end{aligned}$$

2. Pretpostavimo da su y i z u prvoj jednadžbi nula i izračunamo x ($x = 0$).

3. U drugu jednadžbu uvrstimo dobivenu vrijednost za x i pretpostavimo da je $z = 0$. Izračunamo y ($y =-5$).

4. U treću jednadžbu uvrstimo dobivene vrijednosti za x i y i izračunamo z ($z = -7$).

5. Iterativni postupak započinjemo uvrštavanjem vrijednosti za y i z u prvu jednadžbu, pa x i z (koje izračunamo) u drugu jednadžbu, pa x i y u treću jednadžbu.

6. Postupak ponavljamo dok se vrijednosti nepoznanica dobivene u novoj iteraciji razlikuju od vrijednosti iz prethodne iteracije. Kada se dobiju iste vrijednosti nepoznanica u dvije susjedne iteracije završen je Gauss-Seidl-ov iterativni postupak.

$$x = 0.5 \qquad y = 2 \qquad z = 1.5$$

U prethodna tri primjera zadani sustav linearnih jednadžbi riješen je korištenjem tri različite numeričke metode. **Bez obzira koju numeričku metodu (matematički alat) koristili za rješavanje, sustav jednadžbi ima uvijek jednako rješenje.**

4. *Jacobi-jeva linearna iteracija*

Bit će korištena u primjeru modeliranja enzimskih reakcijskih mehanizama

Linearnu jednadžbu zadanu u implicitnom obliku f(x) = 0 možemo riješiti običnom linearnom iteracijom. Ovaj oblik naziva se još i **nul-točka** funkcije jer nam pokaže za koju će vrijednost ulazne veličine x funkcija imati za rješenje vrijednost jednaku nuli, (x=-4.28571; y=0).

Zadana je jednadžba:

$$0.7\,x + 3 = 0$$

X = - 4.28571
Y = 0

Slika 2. Graf funkcije y=0,7*x+3

1. Jednadžbu je potrebno prevesti u oblik: $x + g(x) = 0$

$$(1 - 0.3)\,x + 3 = 0$$
$$x - 0.3\,x + 3 = 0$$

2. Dobiveni oblik funkcije izrazi se eksplicitno po *x* :

$$x = 0.3\,x - 3$$

3. Pretpostavimo početnu vrijednost za *x* i vršimo iterativno izračunavanje sve dok se vrijednosti za *x* u dvije susjedne iteracije razlikuju jedna od druge. Kada se u dvije susjedne iteracije dobiju iste vrijednosti za *x*, postupak izračunavanja je završen.
Opći oblik iterativne formule za ovu metodu je :

$$x_{(k+1)} = a\,x_{(k)} + b$$

* niz rješenja konvergira kada je $|a| < 1$

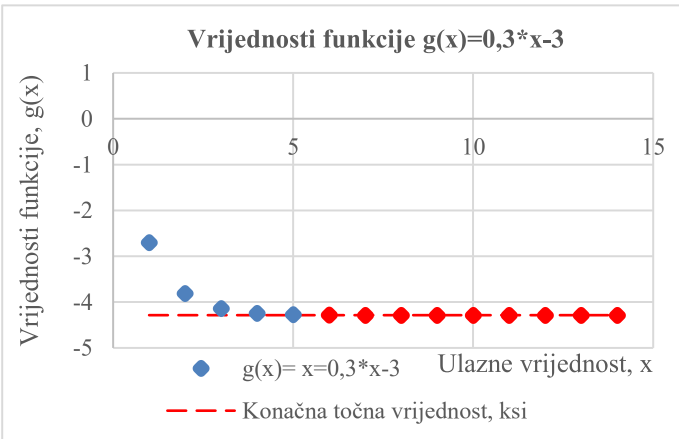
$$x_{(k+1)} = 0.3\,x_{(k)} - 3$$

Pretpostavimo da $x(k) = 1$ u prvoj iteraciji (k = 1)

$x_2 = 0.3\,(1) \quad - 3 = -2.7$
$x_3 = 0.3\,(-2.7) - 3 = -3.81$
$x_4 = 0.3\,(-3.81) - 3 = -4.143$
...
$x_{(k+1)} = x_{(k)} = \xi$ (rješenje, ksi)

Iterativnim izračunavanjem dobiveni su sljedeći rezultati:

k	$x_{(k)}$
0	1
1	-2.7
2	-3.81
3	-4.143
4	-4.2429
5	-4.27287
6	-4.28186
...	
12	-4.28571
13	-4.28571



Slika 3. Graf funkcije g(x)=0,3*x-3

METODE ZA RJEŠAVANJE NELINEARNIH JEDNADŽBI

Iterativne metode

1. Jacobi-jeva linearna iteracija

Zadana je nelinearna jednadžba: $e^{-x} - x = 0$, $f(x) = 0$
(Iz oblika nelinearne jednadžbe vidljivo je da ćemo izračunati nul-točku funkcije (vrijednost varijable x za koju funkcija y ima vrijednost jednaku nuli.)

1. Funkciju je potrebno izraziti eksplicitno po *x:*
(Početna funkcija pretvorena je u izraz za izračunavanje vrijednosti funkcije koja će imati jednaku vrijednost kao ulazna vrijednost za x, y=x.)

$$x = e^{-x}$$

2. Pretpostavimo početnu vrijednost za *x* i uvrštavamo je u iterativni oblik zadane funkcije ($x_0 = 2$).

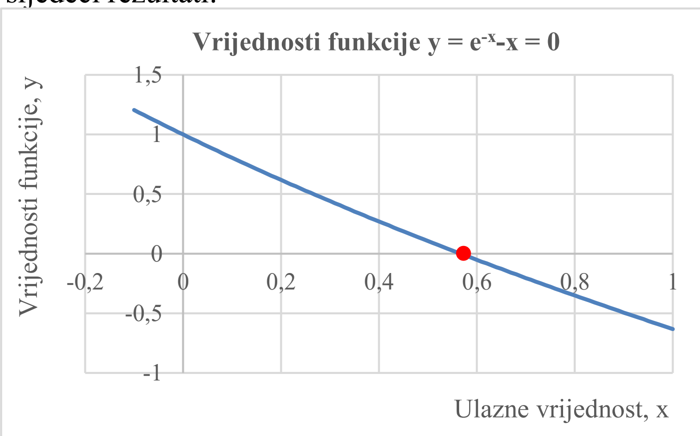
$$x_{(k+1)} = e^{-x(k)}$$

$x_1 = e^{-x0} = e^{-2} = 0.1353353$
$x_2 = e^{-x1} = e^{-0.1353353} = 0.873423$
$x_3 = e^{-x2} = e^{-0.873423} = 0.4175199$
...
$x_{(k+1)} = x_{(k)}$ (rješenje)

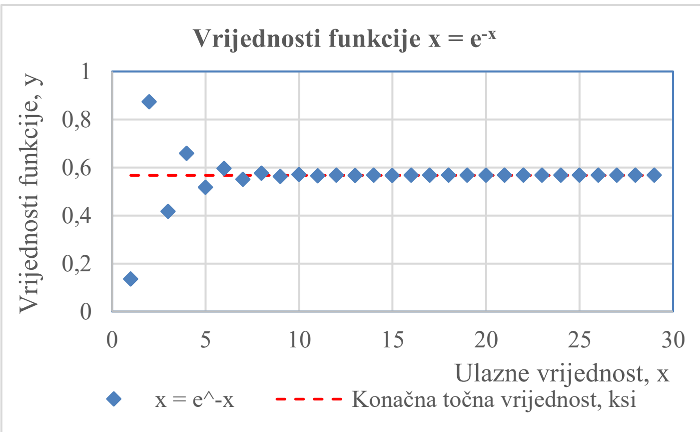
X = 0,5671433
Y = 0

Iterativnim izračunavanjem dobiveni su sljedeći rezultati:

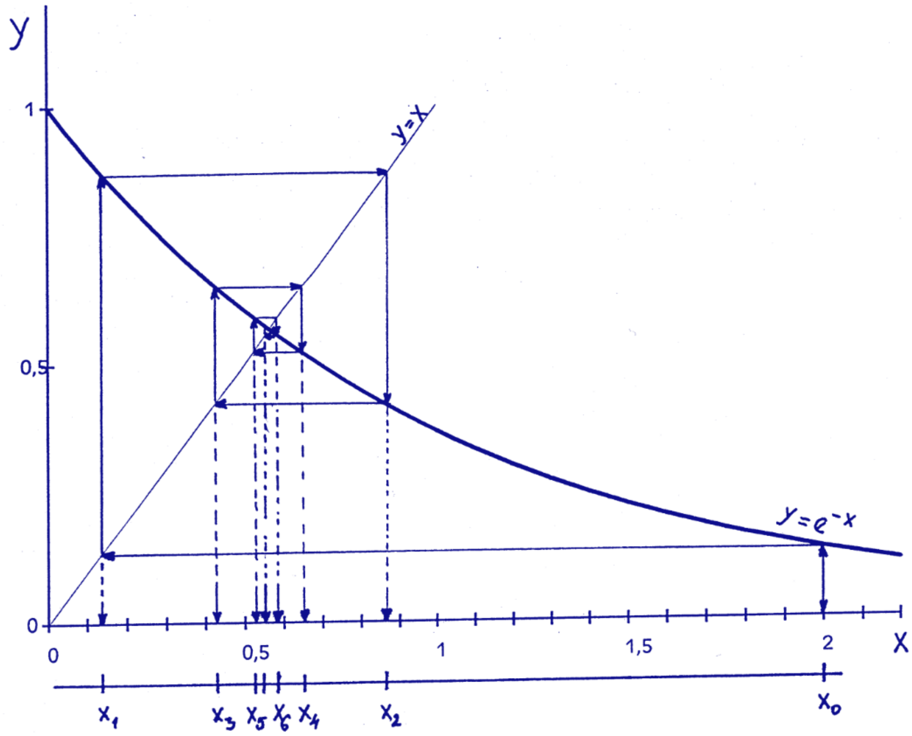
k	$x_{(k)}$
0	2
1	0.1353353
2	0.873423
3	0.4175199
4	0.6586784
5	0.5175349
...	
29	0.5671433
30	0.5671433



Slika 4. Graf funkcije y= e^-x - x = 0



Slika 5. Graf funkcije x= e^-x



Slika 6. Grafičko određivanje rješenja nelinearne jednadžbe metodom Jacobijevih linearnih iteracija

Rješenja se nalaze tako da se izračunata vrijednost y u točci *y=f(x)* upotrijebi kao nova vrijednost varijable x za izračun sljedeće vrijednosti funkcije y. Vrijednost y, koju očitamo na krivulji funkcije u točci (x_0;y), postane nova ulazna vrijednost x. Novu vrijednost za x uvrstimo u funkciju y=f(x) i pomoću nje izračunavamo sljedeću vrijednost y.

Postupak se ponavlja sve do nalaženja konačnog rješenja nelinearne jednadžbe *f(x)=x*, a to je točka u kojoj krivulja presijeca simetralu 1. kvadranta.

Koraci u grafičkom rješavanju primjenom Jacobi-jevih linearnih iteracija:

1. Pretpostavimo neku početnu vrijednost za x i uvrstimo tu vrijednost u iterativni izraz ($x_{(k+1)} = e^{-x(k)}$) kao x_0 vrijednost (na Slici 6. x_0=2).
2. Pomoću pretpostavljene vrijednosti za x_0 izračunamo y ($y = x_{(k+1)} = e^{-x}$) i tu vrijednost uzimamo kao x_1 vrijednost, novu x vrijednost u sljedećoj iteraciji.
3. Uvrštavanjem x_1 u iterativni izraz izračunavamo x_2 i postupak ponavljamo sve do pojavljivanja jednakih rješenja u dvije uzastopne iteracije.
4. Rješenje je vrijednost ulazne veličine x pri kojoj funkcija y ima vrijednost jednaku varijabli x (y=x=0.5671433).

2. Wegstein-ova metoda

Zadana je nelinearna jednadžba: $e^{-x} - x = 0$, $f(x) = 0$

(Iz oblika nelinearne jednadžbe vidljivo je da ćemo izračunati nul-točku funkcije (vrijednost varijable x za koju funkcija y ima vrijednost jednaku nuli.)

2. Funkciju je potrebno izraziti eksplicitno po x :

(Početna funkcija pretvorena je u izraz za izračunavanje vrijednosti funkcije koja će imati jednaku vrijednost kao ulazna vrijednost za x, y=x.)

$$x = e^{-x}$$

2. Pretpostavimo početnu vrijednost za x i uvrstimo je u Jacobi-jev iterativni oblik zadane funkcije

$x_0=2$ $\qquad x_{(k+1)} = e^{-x(k)}$

$x_1 = f(x_0) = e^{-x0} = e^{-2} = 0.1353353$

3. Vrijednost za x_2 odredi se kao apscisa presjeka pravca $y=x$ i sekante kroz točke ($x_0, f(x_0)$) i ($x_1, f(x_1)$) na krivulji koja predstavlja funkciju $f(x)=e^{-x}$.

$$x_1 = f(x_0)$$

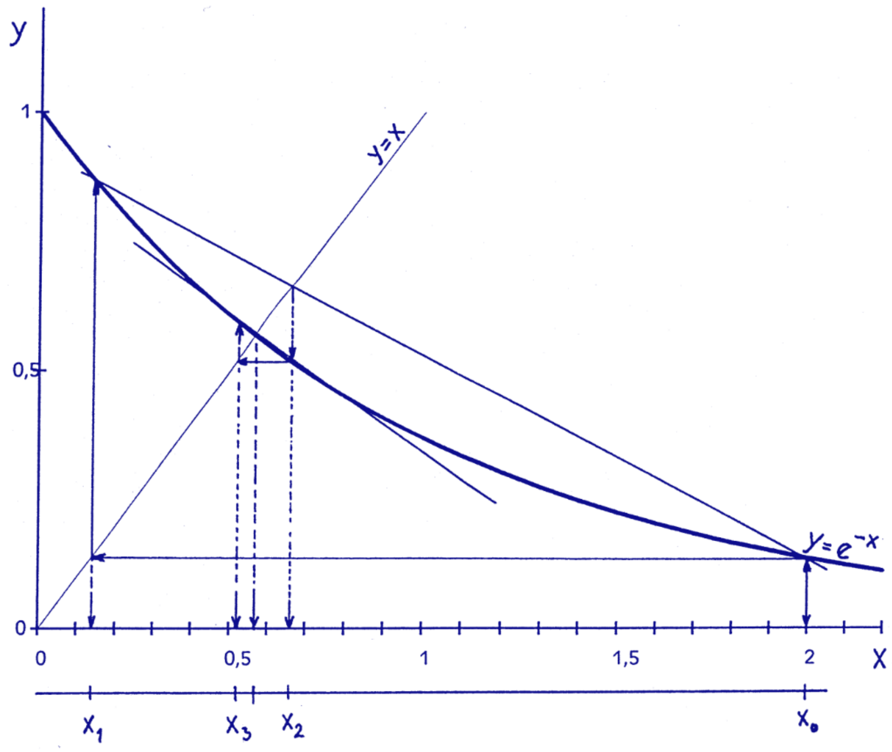
$$x_2 = x_1 + \frac{x_1 - x_0}{\dfrac{x_0 - f(x_0)}{x_1 - f(x_1)} - 1} = \ldots = 0.664116$$

4. Na isti način izvode se i sljedeći koraci iterativnog izračunavanja, pa je opća iterativna formula za sljedeće korake:

$$x_{k+1} = x_k + \frac{x_k - x_{k-1}}{\dfrac{x_{k-1} - f(x_{k-1})}{x_k - f(x_k)} - 1}$$

Iterativnim izračunavanjem dobiveni su sljedeći rezultati:

k	$x_{(k)}$
0	2
1	0.1353353
2	0.664116
3	0.575107
4	0.567006
5	0.5671435
6	0.5671433
7	0.5671433



Slika 7. Grafičko određivanje rješenja nelinearne jednadžbe Wegstein-ovom metodom

Rješenja se nalaze tako da se izračunata vrijednost y u točci *y=f(x)* upotrijebi za izračun druge točke kroz koju ćemo ucrtati liniju sekante na funkciju. Vrijednost x, koju očitamo u presjecištu linije sekante i simetrale 1. kvadranta, postane nova ulazna vrijednost i pomoću nje izračunavamo točke za sljedeću liniju sekante na funkciju.

Postupak se ponavlja sve do nalaženja konačnog rješenja nelinearne jednadžbe *f(x)=x*, a to je točka u kojoj krivulja presijeca simetralu prvog kvadranta.

Koraci u grafičkom rješavanju primjenom Wegstein-ove metode:

1. Pretpostavimo neku početnu vrijednost za x i uvrstimo tu vrijednost u iterativni izraz ($x_{(k+1)} = e^{-x(k)}$) kao x_0 vrijednost (na Slici 7. x_0=2).
2. Pomoću pretpostavljene vrijednosti za x_0 izračunamo vrijednost y_1 ($y_1 = x_{(k+1)} = e^{-x}$) i tu vrijednost uzimamo kao x_1 vrijednost. Ovu vrijednost koristimo kao x-vrijednost u izračunu y-vrijednosti druge točke kroz koju ćemo ucrtati sekantu na liniju funkcije. (Za izračun koristimo izraz naveden u Koraku 4. kod opisa Wegstein-ove metode, str. 9.)
3. Kroz točke (x_0:y_1) i (x_1:y_2) ucrtamo sekantu na funkciju. Točka u kojoj sekanta presijeca simetralu 1. kvadranta (linija funkcije y=x) postaje nova vrijednost varijable x i označavamo ju kao točku x_2. Uvrstimo ju u izraz za izračun vrijednosti funkcije y (nova točka kroz koju će prolaziti linija sekante na funkciju), a iz dobivene vrijednosti izračunamo i drugu točku kroz koju će prolaziti linija sekante na funkciju.
4. Postupak ponavljamo sve do pojavljivanja jednakih rješenja u dvije uzastopne iteracije.
5. Rješenje je vrijednost ulazne veličine x pri kojoj funkcija y ima vrijednost jednaku varijabli x (y=x=0.5671433).

Rješenje funkcije je uvijek jednako, bez obzira koju numeričku metodu ćemo koristiti za izračun vrijednost y.

3. Newton-Raphson-ova metoda (metoda tangente)

Bit će korištena u primjeru modeliranja enzimskih reakcijskih mehanizama i modeliranju koncentriranja rijetkog soka uparavanjem

Zadana je nelinearna jednadžba: $e^{-x} - x = 0$.
(Iz oblika nelinearne jednadžbe vidljivo je da ćemo izračunati nul-točku funkcije (vrijednost varijable x za koju funkcija y ima vrijednost jednaku nuli)

Ova metoda zahtijeva izračunavanje prve derivacije zadane funkcije. Opći oblik iterativne formule je:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

1. Odredimo derivaciju funkcije $f(x)=e^{-x}-x$, koja mora biti implicitno zadana ili naknadno prevedena u implicitni oblik.

$$f(x) = e^{-x}-x$$
$$f'(x) = -e^{-x}-1$$

2. Iterativni oblik formule za zadanu nelinearnu jednadžbu je:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{e^{-x_k} - x_k}{-e^{-x_k} - 1}$$

Pretpostavljena početna vrijednost je: $x_0 = 2$

$$x_1 = x_0 - \frac{e^{-x_0} - x_0}{-e^{-x_0} - 1} = 2 - \frac{e^{-2} - 2}{-e^{-2} - 1} = 0.3576$$

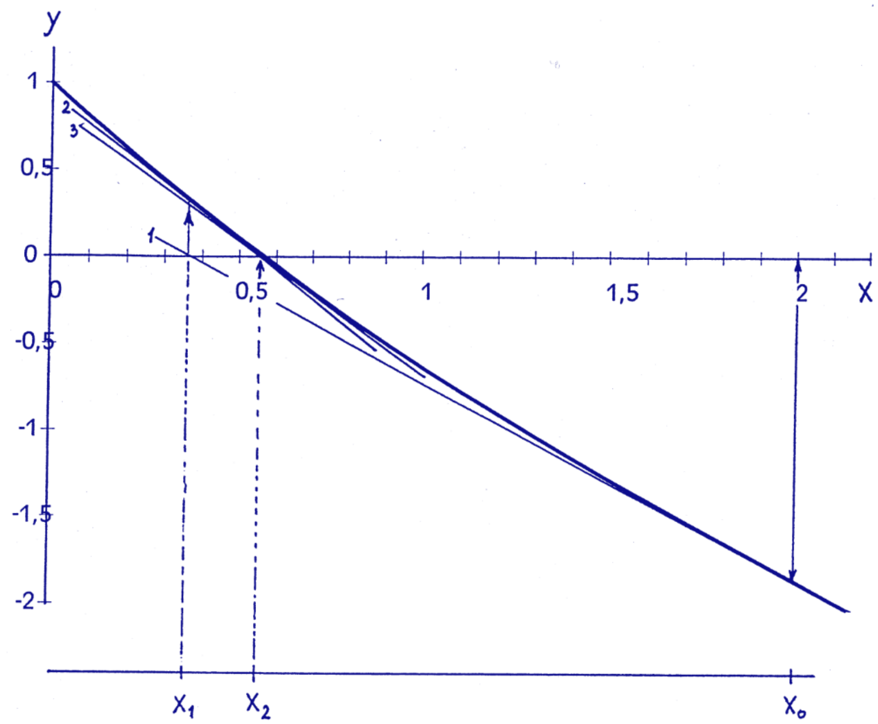
$$x_2 = x_1 - \frac{e^{-x_1} - x_1}{-e^{-x_1} - 1} = \text{........} = 0.5587$$

...

Iterativnim izračunavanjem dobiveni su sljedeći rezultati:

k	$x_{(k)}$
0	2
1	0.3576
2	0.5587
3	0.56713
4	0.5671433
5	0.5671433

Newton-Raphson-ov iterativni postupak ima kvadratnu konvergenciju.



Slika 8. Grafičko određivanje rješenja nelinearne jednadžbe Newton-Raphson-ovom metodom

Rješenja se nalaze tako da se u točci $y=f(x)$, gdje je točka $f(x)=x_{(k+1)}$, povuče tangenta na krivulju $y=f(x)$. U točci gdje tangenta presijeca apscisu očita se vrijednost $x_{(k+1)}$. Za tako dobivenu vrijednost x nađe se $f(x)$ i ponovo u toj točci funkcije povuče tangenta.

Postupak se ponavlja sve do nalaženja konačnog rješenja nelinearne jednadžbe $f(x)=0$, a to je točka u kojoj krivulja presijeca apscisu.

Koraci u grafičkom rješavanju primjenom Newton-Raphson-ove metode:

1. Pretpostavimo neku početnu vrijednost za x i uvrstimo tu vrijednost u iterativni izraz ($x_{k+1} = x_k - \dfrac{e^{-x_k} - x_k}{-e^{-x_k} - 1}$) kao $x_0=x_k$ vrijednost (na Slici 8. $x_0=2$).
2. Pomoću pretpostavljene vrijednosti za x_0 izračunamo vrijednost funkcije y. Kroz ovu točku ucrtamo tangentu na funkciju. Točka u kojoj tangenta presijeca apscisnu os (os x) postaje nova vrijednost varijable $x=x_1$.
3. Uvrstimo vrijednost x_1 u izraz za izračun vrijednosti funkcije y (nova točka kroz koju će prolaziti linija tangente na funkciju). Dobivene vrijednosti varijable x (točke u kojima tangente presijecaju apscisnu, x-os) koristimo u sljedećim iteracijama.
4. Postupak ponavljamo sve do pojavljivanja jednakih rješenja u dvije uzastopne iteracije.
5. Rješenje je vrijednost ulazne veličine x pri kojoj funkcija y ima vrijednost jednaku varijabli x (y=x=0.5671433).

Rješenje funkcije je uvijek jednako, bez obzira koju numeričku metodu ćemo koristiti za izračun vrijednost y.

4. Metoda sekante (regula falsi)

Zadana je nelinearna jednadžba: $e^{-x}-x = 0$

Metoda sekante koristi za pronalaženje rješenja Newton-Raphson-ov algoritam rješavanja, u kojem je derivacija funkcije zamjenjena izrazom *f(x+Δ)* i zbog toga niz rješenja sporije konvergira:

$$f'(x) \cong \frac{f(x+\Delta) - f(x)}{\Delta}$$

Opći oblik iterativne formule metode sekante je:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k+\Delta) - f(x_k)} \cdot \Delta$$

gdje je x_{k+1} sjecište sekante sa apscisom.
Za zadanu jednadžbu iterativna formula je:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{e^{-x_k} + x_k}{\left[e^{-(x_k+\Delta)} - (x_K+\Delta) - (e^{-x_k} + x_k)\right]} \cdot \Delta$$

Konačni oblik nakon uređivanja formule je:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{e^{-x_k} + x_k}{e^{-x_k-\Delta} - e^{-x_k} - \Delta} \cdot \Delta$$

Vrijednost za Δ odabire se proizvoljno, a što je manji Δ to je manje iteracija potrebno za dobivanje konačnog rješenja.
Neka je $\Delta = 0.001$, a $x_0 = 2$.

Iterativnim izračunavanjem dobiveni su sljedeći rezultati:

k	$x_{(k)}$
0	2
1	0.3580
2	0.5582
3	0.567129
4	0.5671433
5	0.5671433

Postupak omogućuje izračunavanje točaka na krivulji kroz koje prolazi sekanta, a potom i točke na apscisi kroz koju prolazi sekanta (x_{k+1}) i ta vrijednost odsječka na apscisi postaje vrijednost varijable x_k u slijedećoj iteraciji. Ovako određena vrijednost apscise uzima se kao vrijednost x_k za slijedeću iteraciju. Prednost je metode sekante nad Newton-Raphson-ovom metodom što ne zahtijeva izračunavanje derivacije, a nedostatak što sporije konvergira.

METODE ZA INTEGRIRANJE DIFERENCIJALNIH JEDNADŽBI

Kada se u tehnološkim procesima promjene vrijednosti praćenih veličina mijenjaju tijekom vremena tada te promjene opisujemo diferencijalnim jednadžbama.

Eksplicitne metode

1. *Euler-ova metoda*

Bit će korištena u primjeru modeliranja procesa smrzavanja namirnice

Zadana je diferencijalna jednadžba:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{5} \cdot (t - y)$$

Opći oblik iterativne formule kod Euler-ove metode je najjednostavnija aproksimacija krivulje dobivena upotrebom samo prva dva člana Taylor-ovog reda u kojima je $y(x_k)$ zamjenjen sa $y(k)$:

$$y_{(k+1)} = y_{(k)} + h \cdot f(y_{(k)}, t_{(k)})$$

gdje je konstanta h korak integracije.

Za zadanu jednadžbu iterativna formula je:

$$y_{(k+1)} = y_{(k)} + h \cdot 0.2\ (\ t_{(k)} - y_{(k)}\ )$$

Neka je korak integracije $h = 0.5$, a $t_0 = 0$ i $y_0 = 0$.
Vrijednost varijable t se u svakoj sljedećoj iteraciji povećava za zadani korak integracije h, a korak integracije je konstantan i za svako izračunavanje ima vrijednost $h = 0.5$.

$y_1 = y_0 + h \cdot 0.2\ (t_0 - y_0) = 0 + 0.5 \cdot 0.2\ (0 - 0) = 0$
$y_2 = y_1 + h \cdot 0.2\ (t_1 - y_1) = 0 + 0.5 \cdot 0.2\ (0.5 - 0) = 0.05$
$y_3 = y_2 + h \cdot 0.2\ (t_2 - y_2) = 0.05 + 0.5 \cdot 0.2\ (1 - 0.05) = 0.145$
...
Iterativnim izračunavanjem dobiveni su sljedeći rezultati kao parovi točaka (x_k, y_k) kojima prolazi integralna krivulja koja predstavlja grafički prikaz integrirane funkcije $f(x)=dy/dt$:

k	$t_{(k)}$	$y_{(k)}$
0	0	0
1	0.5	0
2	1	0.05
3	1.5	0.145
4	2	0.2805
5	2.5	0.45245
6	3	0.657205
7	3.5	0.891485
8	4	1.152336
9	4.5	1.437102
10	5	1.743392
...	…	...

Euler-ova metoda aproksimira krivulju pravcem (tangentom) u svakoj iteraciji.

2. Korigirana (modificirana) Euler-ova metoda

Zadana je diferencijalna jednadžba:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{5} \cdot (t - y)$$

Korekcija Euler-ove metode izvodi se tako da se u polovištu između $t_{(k)}$ i $t_{(k+1)}$ povuče tangenta na krivulju, pa pogreška u $y_{(k+1)}$ postaje manja nego kod obične Euler-ove metode.

Opći oblik iterativne formule je:

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot \frac{1}{2} \left[f\,(y_k, t_k) + f\,\big(y_k + h \cdot f\,(y_k, t_k), t_{k+1}\big) \right]$$

Za zadanu diferencijalnu jednadžbu iterativna formula je:

$$Y_{k+1} = y_k + h \cdot \frac{1}{2} \left[\frac{1}{5}(t_k - y_k) + \frac{1}{5}\left(t_{k+1} - h \cdot \frac{1}{5}(t_k - y_k) \right) \right]$$

Neka je korak integracije $h = 0.5$, a $t_0 = 0$ i $y_0 = 0$.
Vrijednost varijable t se u svakoj sljedećoj iteraciji povećava za zadani korak integracije h, a korak integracije je konstantan i za svako izračunavanje ima vrijednost $h = 0.5$.

Iterativnim izračunavanjem dobiveni su sljedeći rezultati kao parovi točaka (x_k, y_k) kojima prolazi integralna krivulja koja predstavlja grafički prikaz integrirane funkcije $f(x)=dy/dt$:

k	$t_{(k)}$	$y_{(k)}$
0	0	0
1	0.5	0.025
2	1	0.0964
3	1.5	0.2120
4	2	0.3670
5	2.5	0.5683
6	3	0.8053
7	3.5	1.0790
8	4	1.3880
9	4.5	1.7305
10	5	2.1051
...	...	...

3. Taylor-ov razvoj reda

Zadana je diferencijalna jednadžba: $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{5} \cdot (t - y)$

Kod ove metode koristi se Euler-ov algoritam u kojem je funkcija zamijenjena Taylor-ovim redom. Opći oblik iterativne formule kod Euler-ove metode je:

$$y_{(k+1)} = y_{(k)} + h \cdot f(y_{(k)}, t_{(k)})$$

Opći oblik Taylor-ovog razvoja za prva dva člana niza je:

$$Y_{k+1} = y_k + h \cdot f'(y_k, t_k) + \frac{h^2}{2} \cdot f''(y_k, t_k)$$

ili

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot y' + \frac{1}{2} \cdot h^2 \cdot y''$$

Druga derivacija zadane funkcije (diferencijalne jednadžbe) je:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{dy}{dt}\right) + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{5} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{5}(t_k - y_k)\right) + \frac{1}{5}$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{1}{5}\left[1 - \frac{1}{5}(t - y)\right]$$

Opći oblik iterativne formule za zadanu diferencijalnu jednadžbu:

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot \frac{1}{5}(t_k - y_k) + \frac{h^2}{2} \cdot \frac{1}{5}\left[1 - \frac{1}{5}(t_k - y_k)\right]$$

Neka je korak integracije $h = 0.5$, a $t_0 = 0$ i $y_0 = 0$.
Vrijednost varijable t se u svakoj sljedećoj iteraciji povećava za zadani korak integracije h, a korak integracije je konstantan i za svako izračunavanje ima vrijednost $h = 0.5$.
Iterativnim izračunavanjem dobiveni su sljedeći rezultati:

k	$t_{(k)}$	$y_{(k)}$
0	0	0
1	0.5	0.025
2	1	0.0951
3	1.5	0.2061
4	2	0.3540
5	2.5	0.5354
6	3	0.7470
7	3.5	0.9861
8	4	1.2499
9	4.5	1.5361
10	5	1.8427

4. Metoda Runge-Kutta 2

Zadana je diferencijalna jednadžba:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{5} \cdot (t - y)$$

Opći oblik iterativne formule glasi:

$$\vec{y}_{k+1} = \vec{y}_k + \frac{1}{2}\left(\vec{K}_1 + \vec{K}_2\right)$$

gdje su:

$$\vec{K}_1 = h \cdot \vec{f}\left(\vec{y}_k, t_k\right)$$

$$\vec{K}_2 = h \cdot \vec{f}\left(\vec{y}_k + \frac{1}{2}K_1, t_k + \frac{h}{2}\right)$$

Za zadanu diferencijalnu jednadžbu iterativna formula ima sljedeći oblik:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{2}\left[h \cdot \frac{1}{5}\left(t_k - y_k\right) + h \cdot \frac{1}{5}\left(t_k + \frac{h}{2} - y_k - \frac{1}{2} \cdot h \cdot \frac{1}{5}\left(t_k - y_k\right)\right)\right]$$

Neka je korak integracije $h = 0.5$, a $t_0 = 0$ i $y_0 = 0$.
Vrijednost varijable t se u svakoj sljedećoj iteraciji povećava za zadani korak integracije h, a korak integracije je konstantan i za svako izračunavanje ima vrijednost $h = 0.5$.

Iterativnim izračunavanjem dobiveni su sljedeći rezultati:

k	$t_{(k)}$	$y_{(k)}$
0	0	0
1	0.5	0.0613
2	1	0.1653
3	1.5	0.3080
4	2	0.4854
5	2.5	0.6943
6	3	0.9316
7	3.5	1.1945
8	4	1.4806
9	4.5	1.7875
10	5	2.1132
...	...	...

5. Metoda Runge-Kutta 4

Bit će korištena u primjeru modeliranja procesa sterilizacije namirnice u konzervi

Zadana je diferencijalna jednadžba: $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{5} \cdot (t - y)$

Opći oblik iterativne formule glasi: $\vec{y}_{k+1} = \vec{y}_k + \frac{1}{6}\left(\vec{K}_1 + 2 \cdot \vec{K}_2 + 2 \cdot \vec{K}_3 + \vec{K}_4\right)$

gdje su:

$$\vec{K}_1 = h \cdot \vec{f}\left(\vec{y}_k, t_k\right)$$

$$\vec{K}_2 = h \cdot \vec{f}\left(\vec{y}_k + \frac{1}{2}K_1, t_k + \frac{h}{2}\right)$$

$$\vec{K}_3 = h \cdot \vec{f}\left(\vec{y}_k + \frac{1}{2}K_2, t_k + \frac{h}{2}\right)$$

$$\vec{K}_4 = h \cdot \vec{f}\left(\vec{y}_k + \vec{K}_3, t_k + h\right)$$

Za zadanu diferencijalnu jednadžbu iterativna formula ima sljedeći oblik:

$$K_1 = h \cdot \frac{1}{5}\left(t_k - y_k\right)$$

$$K_2 = h \cdot \frac{1}{5}\left[t_k + \frac{h}{2} - y_k - \frac{1}{2} \cdot \left(h \cdot \frac{1}{5}\left(t_k - y_k\right)\right)\right]$$

$$K_3 = h \cdot \frac{1}{5}\left\{t_k + \frac{h}{2} - y_k - \frac{1}{2} \cdot \left[h \cdot \frac{1}{5}\left(t_k + \frac{h}{2} - y_k - \frac{1}{2} \cdot \left(h \cdot \frac{1}{5}(t_k - y_k)\right)\right)\right]\right\}$$

$$K_4 = h \cdot \frac{1}{5}\left(t_k + h - y_k - K_3\right)$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}\left(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4\right)$$

Neka je korak integracije $h = 0.5$, a $t_0 = 0$ i $y_0 = 0$.
Vrijednost varijable t se u svakoj sljedećoj iteraciji povećava za zadani korak integracije h, a korak integracije je konstantan i za svako izračunavanje ima vrijednost $h = 0.5$.

Iterativnim izračunavanjem dobiveni su sljedeći rezultati:

k	$t_{(k)}$	$y_{(k)}$
0	0	0
1	0.5	0.0718
2	1	0.1843
3	1.5	0.3337
4	2	0.5164
5	2.5	0.7294
6	3	0.9697
7	3.5	1.2346
8	4	1.5220
9	4.5	1.8296
10	5	2.1555
...	...	...

Implicitne metode

Upotrebljavaju se kada se u malom vremenskom intervalu događaju nagle promjene (tzv. krute diferencijalne jednadžbe).

6. Gear-ova metoda

Najpoznatija metoda poznata za rješavanje krutih diferencijalnih jednadžbi je Gearova metoda (po Williamu C. Gear-u). Diferencijalnu jednadžbu nazivamo krutom ako mala promjena početnih uvjeta izazove velike promjene u rješenju.
Koristi se za rješavanje sustava običnih diferencijalnih jednadžbi uz promjenjiv korak integracije.
Izračunava aproksimacije rješenja sustava, a sadrži algoritam za automatsku promjenu veličine koraka i reda metode.
Omogućuje smanjenje vremena potrebnog za rješavanje sustava običnih diferencijalnih jednadžbi.
U prvim koracima reducira se u Eulerovu metodu prvog reda s vrlo malim koracima. Kasnije se pokušava povećavati korak i red metode.
Ako niz rješenja nije konvergentan, ponavlja se korak ali s manjim vremenskim intervalom dok se ne zadovolji uvjet konvergencije.
Omogućuje znatno brže rješavanje sustava diferencijalnih jednadžbi od analitičkih metoda. Metoda ima mogućnost automatskog mijenjanja integracijskog koraka. Spada u skupinu Prediktor-korektorskih metoda.
Izračunavanje se odvija u dva dijela:
- prediktorski: izračunava se aproksimacija vrijednosti
- korektorski: vrši se korekcija vrijednosti dobivenih u prediktorskom dijelu

Potrebno je poznavati početne uvjete da bi bilo moguće primijeniti metodu. Vrijednosti se računaju na temelju prethodnih koraka.
Primjenjuje se za izračune kod kemijskih reakcija i automatizacije procesa.

7. Michelson-ova metoda

…

LINEARNO PROGRAMIRANJE

Bit će korišteno u modelima optimiranja sastava smjese, obroka i dnevnog jelovnika, optimiranju iskorištenja pogona i optimiranju transporta proizvoda iz tri tvornice na različite lokacije

Koristi se za **određivanje skupa dopustivih rješenja** te **najniže i/ili najviše vrijednosti funkcije**. Funkcija je u ovim primjerima količina, iznos troškova ili vrijednost zarade (dobiti, profita).
Kada se izračunavaju **troškovi** određujemo **minimalnu** **vrijednost funkcije cilja**.
Kada se izračunava **dobit** određujemo **maksimalnu** **vrijednost funkcije cilja**.

Modele proizvodnje (proizvodne zadatke) najčešće je potrebno opisati sustavima diferencijalnih i nelinearnih jednadžbi. Njihovo izračunavanje je zahtjevno i dugotrajno, a kod bioloških i biotehničkih sustava ne daje točna nego približno točna rješenja. Radi pojednostavljenja i bržeg izračunavanja približnih rješenja sustave diferencijalnih i nelinearnih jednadžbi pretvaramo u linearne jednadžbe i nejednadžbe. Rješenja nisu potpuno točna, ali su dovoljno informativna i utemeljena da bismo ih koristili za rješavanje stvarnih radnih zadataka.

Za rješavanje zadataka s dvije varijable (nepoznanice) možemo koristiti grafički način rješavanja, a zadatke s više varijabli rješavamo primjenom **Simplex** algoritma.

Model linearnog programiranja sastoji se od dva dijela (dva podmodela).
To su **model ograničenja** i **model funkcije cilja**.

Funkcija cilja (Fc) najčešće je suma produkata cijena i količina sirovina pa je njen opći oblik:

$$Fc = \sum_{i=1}^{n} (c_i \cdot S_i)$$

Model ograničenja sastoji se od niza linearnih jednadžbi i nejednadžbi, koje mogu biti različitih oblika (<, ≤, =, ≥, >) pa je opći oblik ograničenja:

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i \cdot S_i) < b_i$$

$$\sum_{j=1}^{n} (a_j \cdot S_j) \leq b_j$$

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k \cdot S_k) = b_k$$

$$\sum_{l=1}^{n} (a_l \cdot S_l) > b_l$$

$$\sum_{m=1}^{n} (a_m \cdot S_m) \geq b_m$$

U ove modele nije uključeno vrijeme pa oni **predstavljaju modele u stacionarnom stanju** i **pripadaju skupini stohastičkih matematičkih modela**. **Rješenja jednadžbi stohastičkih modela** nisu uvijek točna nego **su samo približno točna**. Ponavljanje istog postupka izračunavanja neće uvijek dati jednako (približno) rješenje. Uprkos ovom nedostatku, postoje brojna područja gdje su nam stohastički modeli korisni.

Najpoznatiji je primjer ovakvih rješenja upravo vremenska prognoza za sljedeći dan ili naredno razdoblje. Isto tako, ako bi svaki student u grupi studenata mogao pojesti identičnu jabuku, ona se ne

bi jednako iskorištavala u pojedinim metaboličkim procesima; svaki od njih bi u metabolizmu imao drugačiju apsorpciju hranjivih tvari. Zbog ovakvih situacija, u zadacima gdje nije moguće odrediti točna rješenja, zadovoljavamo se i približnim rješenjima ili prognozama rješenja. Stoga njihove matematičke opise lineariziramo i izračunavamo približna rješenja.
U prehrambeno-procesnom inženjerstvu i nutricionizmu linearno programiranje upotrebljava se za:
- optimalno namješavanje smjese sirovina,
- optimiranje sastava obroka,
- optimiranje iskorištenja pogona/strojeva,
- optimiranje transporta i brojne druge zadatke.

Primjer 1. Optimalno namješavanje smjese sirovina

Potrebno je odrediti optimalan sastav smjese i najveću moguću količinu, a da bude zadovoljen normativ za spravljanje smjese.

Primjer:
Odredi maksimalnu količinu smjese i udio pojedinih sirovina u njoj, uz zadane uvjete:

- sirovina S_1 sadrži 15% komponente A, 50% komponente B i 8% komponente C
- sirovina S_2 sadrži 10% komponente A, 30% komponente B i 4% komponente C

- komponente A u proizvodu mora biti najmanje 13% (A >= 13%)
- komponente B u proizvodu smije biti najviše 47% (B <= 47%)
- komponente C u proizvodu mora biti najmanje 5% (C >= 5%)

- maksimalna raspoloživa količina sirovine S_1 je 500 kg
- maksimalna raspoloživa količina sirovine S_2 je 800 kg

Tablica 1. Prikaz zadatka iz Primjera 2.

sirovine	komponente		
	A	B	C
S_1	15	50	8
S_2	10	30	4

Model ograničenja:

1. $0.15\ S_1 + 0.10\ S_2 >= 0.13\ (S_1 + S_2)$
2. $0.50\ S_1 + 0.30\ S_2 <= 0.47\ (S_1 + S_2)$
3. $0.08\ S_1 + 0.04\ S_2 >= 0.05\ (S_1 + S_2)$
4. $1\ S_1 + 0\ S_2 <= 500$
5. $S_2 <= 800$

1. $0.15\ S_1 + 0.10\ S_2 >= 0.13\ (S_1 + S_2)$
$0.15\ S_1 - 0.13\ S_1 >= 0.13\ S_2 - 0.10\ S_2$
$0.02\ S_1 >= 0.03\ S_2$
$S_1 >= 1.5\ S_2$

($S_2 = 0$, $S_1 >= 0$) ($S_2 = 200$, $S_1 >= 300$) => dvije točke kroz koje prolazi pravac ograničenja

2. $0.50\ S_1 + 0.30\ S_2 <= 0.47\ (S_1 + S_2)$
$0.50\ S_1 - 0.47\ S_1 <= 0.47\ S_2 - 0.30\ S_2$
$0.03\ S_1 <= 0.17\ S_2$
$S_1 <= 5.66\ S_2$
$(S_2 = 0\ ,\ S_1 <= 0)$ $(S_2 = 100\ ,\ S_1 <= 566)$

3. $0.08\ S_1 + 0.04\ S_2 >= 0.05\ (S_1 + S_2)$
$0.08\ S_1 - 0.05\ S_1 >= 0.05\ S_2 - 0.04\ S_2$
$0.03\ S_1 >= 0.01\ S_2$
$S_1 >= 0.33\ S_2$
$(S_2 = 0\ ,\ S_1 >= 0)$ $(S_2 = 500\ ,\ S_1 >= 165)$

Model funkcije cilja: max $F = S_1 + S_2$

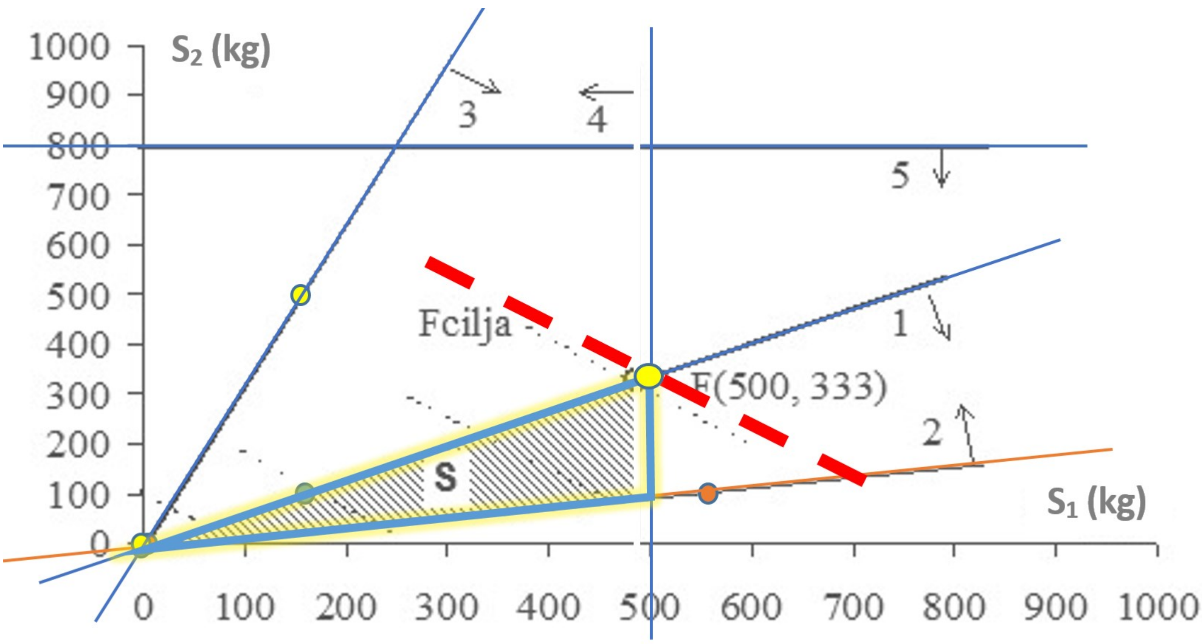
Da bismo ucrtali na grafikon liniju Funkcije cilja, pretpostavimo da je $F = 100$ kg !
(Možemo pretpostaviti i bilo koju drugu vrijednost. Konačni rezultat će biti jednak.)

Uvrštavanjem pretpostavljene vrijednosti u izraz za Funkciju cilja odredimo vrijednosti za količine sirovina S_1 i S_2. Kada je $S_1=0$ tada je $S_2=100$, a kada je $S_1=100$ tada je $S_2=0$.

$$F = S_1 + S_2 = 100 \qquad (S_1=0,\ S_2=100)\ , \qquad (S_1=100,\ S_2=0)$$

Ucrtamo liniju funkcije cilja (pravac) kroz točke ($S_1=0$, $S_2=100$) i ($S_1=100$, $S_2=0$).
Budući da se traži maksimum funkcije cilja, povlačimo pravce paralelne sa ucrtanim pravcem i tražimo točku koja je najudaljenija od ishodišta, a nalazi se na jednoj od paralela i pripada skupu dopustivih rješenja **S**. U toj točci očitamo S_1 i S_2.

Grafičko rješenje:



Slika 9. Prikaz grafičkog načina rješavanja zadatka iz Primjera 1.

Očitane vrijednosti za S_1 i S_2 uvrstimo u jednadžbu funkcije cilja i izračunamo njen maksimum:

$$\mathbf{max\ F = S_1 + S_2 = 500 + 333.33 = 833.33\ kg}$$

Maksimalna količina smjese s optimalnim sastavom koji zadovoljava tražene uvjete je 833.33 kg, od čega je 500 kg sirovine S_1, a 333.33 kg sirovine S_2.

Provjera rješenja:

1)	$S_1 >= 1.5\ S_2$	$500 >= 1.5 \cdot 333.33$	$500 >= 499.955$	✓
2)	$S_1 <= 5.66\ S_2$	$500 <= 5.66 \cdot 333.33$	$500 <= 1886.65$	✓
3)	$S_1 >= 0.33\ S_2$	$500 >= 0.33 \cdot 333.33$	$500 >= 111.11$	✓
4)	$S_1 <= 500$		$500 <= 500$	✓
5)	$S_2 <= 800$		$333.33 <= 800$	✓

Primjer 2. Optimiranje sastava obroka

Potrebno je proizvesti 800-1000 kg proizvoda, koji će zadovoljavati slijedeća ograničenja:

- sirovina S_1 sadrži 28.9% komponente A, 22.5% komponente B i 2.8% komponente C
- sirovina S_2 sadrži 10.6% komponente A, 29.9% komponente B i 54.9% komponente C

- komponente A u proizvodu treba biti između 20 i 25% (20%>= A <= 25%)
- komponente B u proizvodu ne smije biti više od 27% (B <= 27%)
- komponente C u proizvodu mora biti najmanje 11% (C >= 11%)

- cijena sirovine S_1 je 9,30 kuna po kilogramu
- cijena sirovine S_2 je 5,00 kuna po kilogramu

Izradite najjeftiniju recepturu, koja zadovoljava zadani normativ.

Tablica 2. Prikaz zadatka iz Primjera 2.

sirovine	komponente			cijena kn/kg
	A	B	C	
S_1	28.9	22.5	2.8	9.30
S_2	10.6	29.9	54.9	5.00

Model ograničenja:

1. $\mathbf{S_1 + S_2 >= 800}$
2. $\mathbf{S_1 + S_2 <= 1000}$
3. $\mathbf{0.289\ S_1 + 0.106\ S_2 >= 0.20\ (S_1 + S_2)}$
4. $\mathbf{0.289\ S_1 + 0.106\ S_2 <= 0.25\ (S_1 + S_2)}$
5. $\mathbf{0.225\ S_1 + 0.299\ S_2 <= 0.27\ (S_1 + S_2)}$
6. $\mathbf{0.028\ S_1 + 0.549\ S_2 >= 0.11\ (S_1 + S_2)}$

1. $S_1 + S_2 >= 800$
   $(S_2 = 0 , S_1 >= 800)$ $(S_2 >= 800 , S_1 = 0)$

2. $S_1 + S_2 <= 1000$
   $(S_2 = 0 , S_1 <= 1000)$ $(S_2 <= 1000 , S_1 = 0)$

3. $0.289\ S_1 + 0.106\ S_2 >= 0.20\ (S_1 + S_2)$
   $0.289\ S_1 - 0.20\ S_1 >= 0.20\ S_2 - 0.106\ S_2$
   $0.089\ S_1 >= 0.094\ S_2$
   $S_1 >= 1.056\ S_2$
   $(S_2 = 0 , S_1 >= 0)$ $(S_2 = 100 , S_1 >= 105.6)$

4. $0.289\ S_1 + 0.106\ S_2 <= 0.25\ (S_1 + S_2)$
   $0.289\ S_1 - 0.25\ S_1 <= 0.25\ S_2 - 0.106\ S_2$
   $0.039\ S_1 <= 0.144\ S_2$
   $S_1 <= 3.69\ S_2$

($S_2 = 0$, $S_1 <= 0$) ($S_2 = 100$, $S_1 <= 369$)

5. $0.225\ S_1 + 0.299\ S_2 <= 0.27\ (S_1 + S_2)$
$0.299\ S_1 - 0.27\ S_2 <= 0.27\ S_1 - 0.225\ S_1$
$0.029\ S_2 <= 0.045\ S_1$
$S_1 >= 0.64\ S_2$
($S_2 = 0$, $S_1 >= 0$) ($S_2 = 100$, $S_1 >= 64$)

6. $0.028\ S_1 + 0.549\ S_2 >= 0.11\ (S_1 + S_2)$
$0.549\ S_2 - 0.11\ S_2 >= 0.11\ S_1 - 0.028\ S_1$
$0.439\ S_2 >= 0.082\ S_1$
$S_1 <= 5.35\ S_2$
($S_2 = 0$, $S_1 <= 0$) ($S_2 = 100$, $S_1 <= 535$)

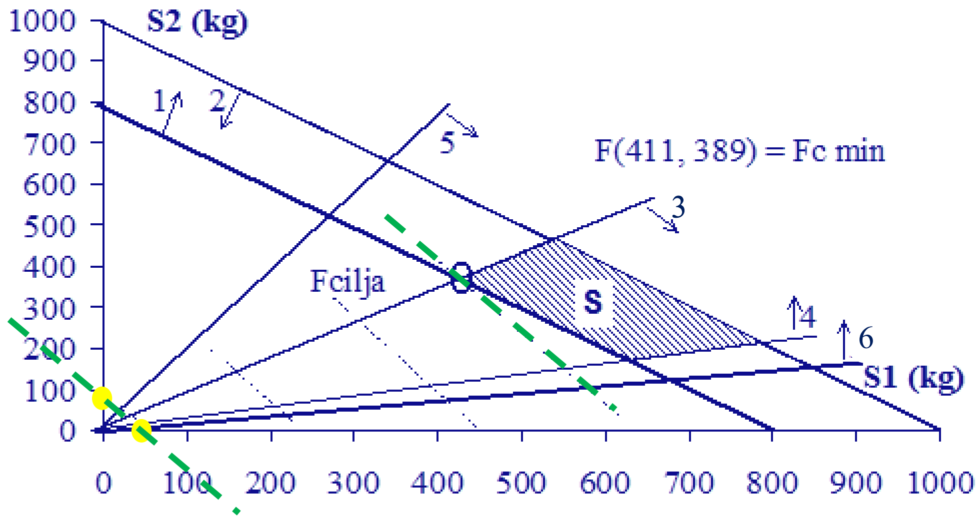
Model funkcije cilja: min $F = 9.30\ S_1 + 5.00\ S_2$

Da bismo ucrtali na grafikon liniju Funkcije cilja, pretpostavimo da je F = 465 kuna !
(Možemo pretpostaviti i bilo koju drugu vrijednost. Konačni rezultat će biti jednak.)

$F = 9.30\ S_1 + 5.00\ S_2 = 465$ (S_1=0, S_2=93) (S_1=50, S_2=0)

Ucrtamo liniju funkcije cilja (pravac) kroz točke *(S_1=0, S_2=93)* i *(S_1=50, S_2=0)*. Budući da se traži minimum funkcije cilja, povlačimo pravce paralelne sa ucrtanim pravcem i tražimo točku koja je najbliža ishodištu, a nalazi se na jednoj od paralela i pripada skupu dopustivih rješenja ***S***. U toj točci očitamo S_1 i S_2.

Grafičko rješenje:



Slika 10. Prikaz grafičkog načina rješavanja zadatka iz Primjera 2.

Očitane vrijednosti za S_1 i S_2 uvrstimo u jednadžbu funkcije cilja i izračunamo njen minimum:

$$F = 9.30\ S_1 + 5.00\ S_2 = 9.30 \cdot 411 + 5.00 \cdot 389 = 5767.30 \text{ kuna} / (411+389) \text{ kg}$$

Najjeftiniju recepturu imat ćemo kada u proizvodu budemo imali 411 kg sirovine S_1 i 389 kg sirovine S_2. Najjeftinija receptura (800 kg) koštat će 5767.30 kn (7.21 kn/kg).

Provjera rješenja:

1)	$S_1 + S_2 >= 800$	$411 + 389 >= 800$	$800 >= 800$	✓
2)	$S_1 + S_2 <= 1000$	$411 + 389 <= 1000$	$800 <= 1000$	✓
3)	$S_1 >= 1.056\ S_2$	$411 >= 1.056 \cdot 389$	$411 >= 410.78$	✓
4)	$S_1 <= 3.69\ S_2$	$411 <= 3.69 \cdot 389$	$411 <= 1435.41$	✓
5)	$S_1 >= 0.64\ S_2$	$411 >= 0.64 \cdot 389$	$411 >= 248.96$	✓
6)	$S_1 <= 5.35\ S_2$	$411 <= 5.35 \cdot 389$	$411 <= 2081.15$	✓

Primjer 3. Optimiranje iskorištenja pogona/strojeva

Proizvode se dva proizvoda (X_1 i X_2) u tri pogona (A, B i C).
Pri tomu:
- pogon A radi 20 sati dnevno, pogon B radi 21 sat dnevno, a pogon C radi 18 sati dnevno.
- za prvi proizvod pogonu A treba 1 sat po toni, pogonu B 1 sat po toni, a pogonu C 2 sata po toni.
- za drugi proizvod pogonu A treba 1.1 sat po toni, pogonu B 4 sata po toni, a pogonu C 2.5 sati po toni.
- proizvodnja prvog proizvoda košta 4 kune po kilogramu, a drugog proizvoda 6 kuna po kilogramu
- prodajna cijena prvog proizvoda je 8 kuna po kilogramu, a drugog proizvoda 12 kuna po kilogramu
- minimalni plan proizvodnje je 2 tone na dan prvog proizvoda i 3 tone na dan drugog proizvoda.

Izračunajte optimalni plan proizvodnje uz ostvarivanje maksimalnog profita.

Tablica 3. Prikaz zadatka iz Primjera 3.

POGON	X_1	X_2	KAPACITET
A	1	1.1	20
B	1	4	21
C	2	2.5	18
TROŠKOVI	6.00	2.00	
CIJENA	10.00	8.00	
MIN. KOLIČINE	2	3	
OPTIMALNI PLAN	?	?	

Model ograničenja:

1. $1\,X_1 + 1.1\,X_2 <= 20$
2. $1\,X_1 + 4\,X_2 <= 21$
3. $2\,X_1 + 2.5\,X_2 <= 18$
4. $X_1 >= 2$
5. $X_2 >= 3$

1. $1\,X_1 + 1.1\,X_2 <= 20$

$X_1 <= 20 - 1.1\,X_2$

($X_2=0, X_1<=20$) ($X_2=9, X_1<=10.1$)

2. $1\,X_1 + 4\,X_2 <= 21$

$X_1 <= 21 - 4\,X_2$

($X_2=0, X_1=21$) ($X_2=2, X_1=13$)

3. $2\,X_1 + 2.5\,X_2 <= 18$

$2\,X_1 <= 18 - 2.5\,X_2$

$X_1 <= 9 - 1.25\,X_2$

($X_2=0, X_1=9$) ($X_2=2, X_1=6.5$)

Model funkcije cilja:

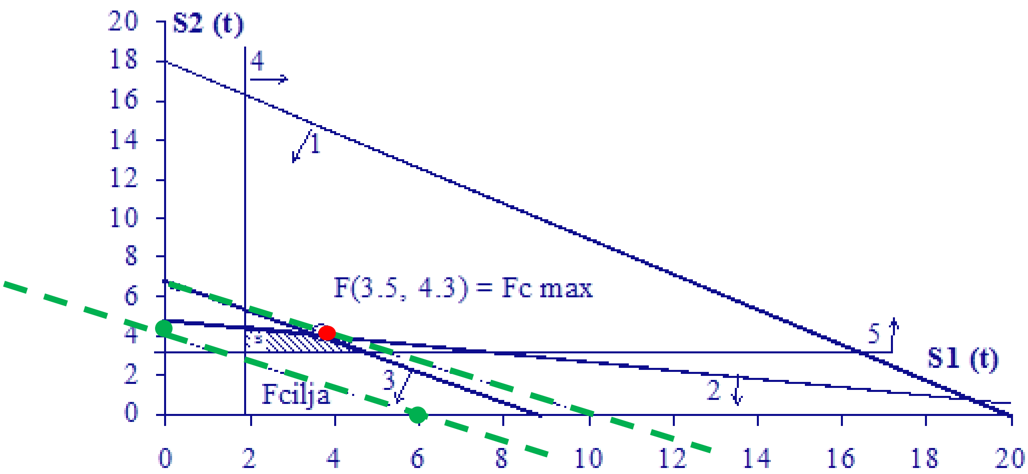
F = profit = CIJENA - TROŠKOVI
$F = (10.00\ X_1 + 8.00\ X_2) - (4.00\ X_1 + 2.00\ X_2)$
$\max F = 4.00\ X_1 + 6.00\ X_2$

Da bismo ucrtali na grafikon liniju Funkcije cilja, pretpostavimo da je F = 24.00 kuna !
(Možemo pretpostaviti i bilo koju drugu vrijednost. Konačni rezultat će biti jednak.)

$F = 4.00\ X_1 + 6.00\ X_2 = 24$ $(X_2=0, X_1=6)$ $(X_1=0, X_2=4)$

Ucrtamo u graf liniju funkcije cilja (pravac kroz točke $(X_2=0, X_1=6)$ i $(X_1=0, X_2=4)$).
Budući da se traži maksimum funkcije cilja, povlačimo pravce paralelne sa ucrtanim pravcem i tražimo točku koja je najudaljenija od ishodišta, a nalazi se na jednoj od paralela i pripada skupu dopustivih rješenja ***S***. U toj točci očitamo X_1 i X_2.

Grafičko rješenje:



Slika 11. Prikaz grafičkog načina rješavanja zadatka iz Primjera 3.

Očitane vrijednosti za X_1 i X_2 uvrstimo u jednadžbu funkcije cilja i izračunamo njen maksimum:

$$F = 4.00\ X_1 + 6.00\ X_2 = 4.00 \cdot 3500 + 6.00 \cdot 4300 = 39800 \text{ kn} / 7800 \text{ kg}$$

Maksimalan profit uz optimalno iskorištenje pogona je **39800 kuna**, a proizvede se **3.5 tona** proizvoda X_1 i **4.3 tone** proizvoda X_2.

Provjera rješenja:

1)	$X_1 <= 21 - 4\ X_2$	$3.5 <= 21 - 17.2$	$3.5 <= 3.8$	✓
2)	$X_1 <= 20 - 1.1\ X_2$	$3.5 <= 20 - 4.73$	$3.5 <= 15.27$	✓
3)	$X_1 <= 9 - 1.25\ X_2$	$3.5 <= 9 - 5.375$	$3.5 <= 3.625$	✓
4)	$X_1 >= 2$		$3.5 >= 2$	✓
5)	$X_2 >= 3$		$4.3 >= 3$	✓

DODATAK

DODATAK 1

Podjela matematičkih modela

Matematičke modele moguće je razlikovati i klasificirati na različite načine. Obzirom na jednadžbe kojima je realni model tehnološke operacije ili procesa opisan matematički modeli mogu biti:

Matematički modeli obzirom na vrstu i oblik			
1	analitički	ili	empirijski
2	**deterministički**	**ili**	**stohastički**
3	linearni	ili	nelinearni
4	stacionarnih stanja	ili	nestacionarnih stanja
5	s koncentriranim parametrima	ili	s raspodijeljenim parametrima
6	kontinuirani *(neprekidni)*	ili	diskontinuirani *(diskretni)*
7	s jednom varijablom *(monovarijabilni modeli)*	ili	s više varijabli *(bi- i multi-varijabilni ili modeli prostora stanja)*

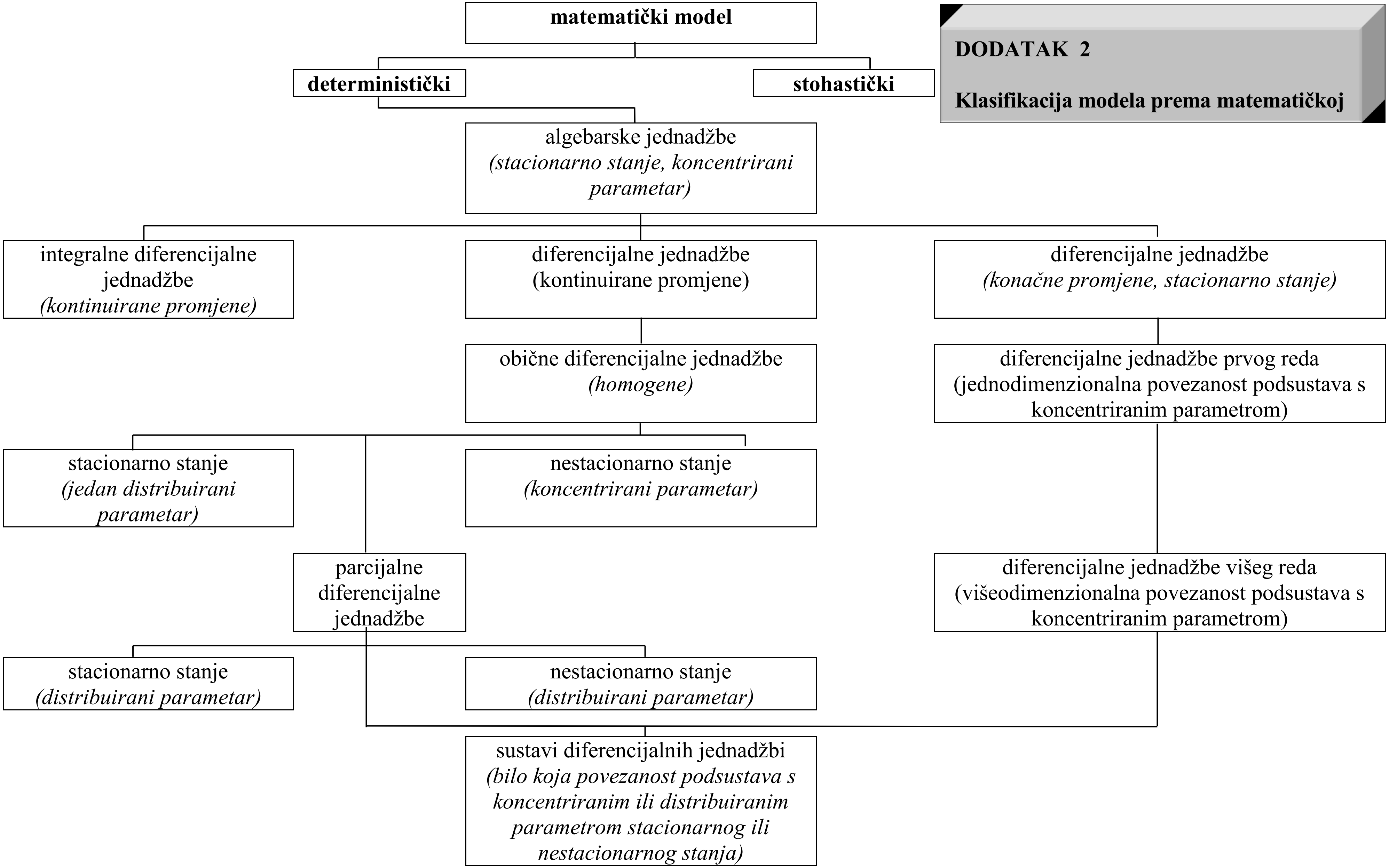
Prijevod iz:
Himmelblau D.M., Bischoff K.B. (1968). *Process Analysis and Simulation*. Wiley, New York.

Deterministički modeli i matematički alati za rješavanje jednadžbi prikazani su u Dodatku 2. i 3.

Izvor:
Dang N.D.P., Smith R.R.. *The Application of Modelling and Control to Food Processing* Operations in: **Control of food quality and food analysis**. pp 279-289. Elsevier applied science publishers Ltd, *England,1984.*

DODATAK 2

Klasifikacija modela prema matematičkoj



DODATAK 3

Matematički alati za rješavanje jednadžbi modela

REALNI PROCES

MATEMATIČKI MODEL

DETERMINISTIČKI MODEL | STOHASTIČKI MODEL

Vrsta jednadžbe	Algebarske	Homogene diferencijalne	Parcijalne diferencijalne	Integralne diferencijalne	Ograničen sustav diferencijalnih j
	Operacijske metode		Operacijske metode (separacija varijabli)		Izvodi
Analitičke metode	**1. Matrične metode** 2. Hornerova metoda 3. Posebne formule za jednadžbe nižeg reda 4. Binghamova metoda 5. Kvadratni korijen 6. Vincentov teorem 7. Sturmov teorem za korjenovanje 8. Cardanovo rješenje	**1. Separacija varijabli** 2. Varijacija parametara **3. Eliminacija** 4. Složene amplitude 5.Transformacija varijabli 6. Diferencijalni operatori 7. Integracija u serijama 8. Frobeniusova metoda 9. Posebne nelinearne j **10. Matrične metode** 11. Liouvilleova formula 12. Greenove funkcije 13. Kontinuirane frakcije	1. Transformacije integrala **2. Separacija varijabli** 3. Posebni nizovi rješenja 4. Greenove funkcije 5. Hodograf metoda 6. Kernelove funkcije 7. Whittakerova opća rješenja 8. Približno integriranje 9. Varijacijske metode	1. Uzastopna poboljšanja 2. Približna integriranja 3.Hilbert-Schmidtov teorem **4. Nelinearne metode** 5. Voltera integrali 6. Bilinearne jednadžbe 7.Pojedinačne integralalne j 8. Fredholmova metoda ponovljenih jezgri 9. Neumanovi nizovi 10. Euskogova metoda	1. Bernoulieva metoda 2. Linearni konstantni koeficijenti a) proizvoljne konstante b) generiranje funkcija c) polinomna rješenja 3.Linearni promjenjivi koeficijenti a) Laplaceove metode b) generiranje funkcija c) Andreova metoda d) promjena varijable 4. Transformacije integrala **5. Rješenja nizova**
Numeričke i/ili analogne računalne metode	**1. Newton-Raphsonova metoda** 2. **Jacobijeva linearna iteracija** 3. Metode približavanja (Viet, Liu, Anderson, MacLaurin, Paluver, Lobachevski, Bernouli) 4. **Simpleks metoda** 5. Carnesova perturbaciona m 6. Umjetno dijeljenje 7.Poboljšanje približnih korijena	**1. Runge-Kutta metode** 2. Pickardova metoda **3. Nizovi** 4. Adams-Bashforth 5. Milneova metoda **6. Matrične metode** **7. Eulerova metoda**	**1. Metoda konačnih razlika** 2. Adamsova metoda 3. Richardsonova metoda 4. Polugrupne metode 5. Metode popuštanja	1. Ritzova metoda 2. Kellogova metoda	**1. Newton-Raphsonova metoda** **2. Numerička integracija** **3. Metoda konačnih razlika** 4. Parcijalne diferencijalne j. a) Booleova simbolička metoda b) Fourier, Legendre, Ellisova m c) Generiranje funkcija